Лекция 1.
Метрические пространства

В математике очень важную роль играет понятие пространства, т. е. множества, между элементами которого аксиоматически заданы некоторые соотношения. В таком случае говорят, что на множестве задана структура соответствующего пространства. В этой лекции мы рассмотрим понятие метрического пространства — множества, для элементов которого определено понятие расстояния. С помощью расстояния можно ввести одну из важнейших операций анализа — операцию предельного перехода.

1.1 Определение метрического пространства. Примеры

Определение 1.1. *Метрическим пространством* называется пара (X, ρ), где X — некоторое множество, а $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ — функция расстояния (метрика), удовлетворяющая следующим аксиомам (аксиомам расстояния):

1. для любых $x, y \in X$ $\rho(x, y) \geqslant 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (*неотрицательность*);
2. для любых $x, y \in X$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*симметричность*);
3. для любых $x, y, z \in X$ $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (*неравенство треугольника*).

В дальнейшем, мы зачастую метрическое пространство будем обозначать тем же символом, что и само множество X.

Приведем примеры метрических пространств.

1. *Пространство изолированных точек*. Для произвольного множества X введем функцию расстояния следующим образом:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Введенная функция удовлетворяет аксиомам расстояния (показать самостоятельно).

2. *Пространство действительных чисел* $\mathbb{R}$. Расстояние вводится следующим образом:

$$\rho(x, y) = |x - y|. \tag{1.1}$$

3. *Пространство* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_2$ — множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, n$$

с функцией расстояния

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}\,. \tag{1.2}$$

Неравенство треугольника вытекает из неравенства Коши—Буняковского (позже мы докажем неравенство Коши—Буняковского для более общего случая):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2=\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2+2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n}b_k^2}+\sum_{k=1}^{n}b_k^2=\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\right)^2.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей неравенства и заменяя $a_k = x_k - y_k$, $b_k = y_k - z_k$, получаем неравенство треугольника для метрики (1.2). Проверка остальных аксиом очевидна.

4. *Пространство* $\mathbb{R}^n_p$, $p \geqslant 1$. На множестве $\mathbb{R}^n$ может быть введена метрика следующим образом:

$$\rho_p(x,\,y)=\Big(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\Big)^{1/p}.$$

Справедливость аксиом 1 и 2 очевидна. Справедливость аксиомы 3 следует из неравенства Минковского, справедливое при $p \geqslant 1$:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\Big)^{1/p}\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\Big)^{1/p}.$$

5. *Пространство* $C[a,\,b]$ *непрерывных на отрезке* $[a,\,b]$ *функций*. Расстояние вводится следующим образом:

$$\rho(x,\,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$$

(выполнимость аксиом расстояния проверить самостоятельно). Это пространство играет очень важную роль в анализе.

1.2 Открытые и замкнутые множества. Плотные множества

Введем несколько понятий. *Открытым шаром* $B(x_0,\,r)$ в метрическом пространстве X называется совокупность точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x,\,x_0) < r$. *Замкнутым шаром* $B[x_0,\,r]$ называется совокупность точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x,\,x_0) \leqslant r$. Точка x_0 называется *центром*, а число $r > 0$ — *радиусом* шара. Открытый шар радиуса ε с центром в точке x_0 называется *ε-окрестностью* точки x_0 и обозначается как $O_\varepsilon(x_0)$.

Приведем классификацию точек множества. Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset X$, если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M. Точка $x \in X$ называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M. Точка $x \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если существует окрестность $O_\varepsilon(x)$, целиком лежащая в M. Точка $x \in M$ называется *изолированной точкой* множество M, если в достаточно малой ее окрестности $O_\varepsilon(x)$ нет точек из M, отличных от x. Имеет место следующее утверждение (доказать самостоятельно): *всякая точка прикосновения является либо предельной, либо изолированной.*

Определение 1.2. Совокупность всех точек прикосновения множества M называется *замыканием* этого множества и обозначается $[M]$.

Таким образом, для множеств метрического пространства можно определить операцию замыкания — переход от множества M к его замыканию $[M]$.

Теорема 1.1. *Операция замыкания обладает следующими свойствами*:

1. $M \subset [M]$,
2. $[[M]] = [M]$,
3. *если* $M_1 \subset M_2$, *то* $[M_1] \subset [M_2]$,
4. $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Определение 1.3. Множество M называется *замкнутым*, если $[M] = M$.

Из теоремы 1.1 вытекает, что замыкание любого множества — замкнутое множество.

Определение 1.4. Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*.

Между открытыми и замкнутыми множествами имеется следующая связь.

Теорема 1.2. *Для того чтобы множество M было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $X \setminus M$ до всего пространства X было открыто.*

Отсюда, в частности, вытекает, что пустое множество и все X одновременно и открыты, и замкнуты.

Открытые и замкнутые множества обладают следующими свойствами.

Теорема 1.3.

1. *Объединение любого числа (конечного или бесконечного) открытых множеств является открытым множеством.*
2. *Пересечение любого конечного числа открытых множеств является открытым множеством.*
3. *Объединение любого конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*
4. *Пересечение любого числа (конечного или бесконечного) замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Задание 1.1. Привести примеры, показывающие, что пересечение бесконечного числа открытых множеств не обязательно открыто, а объединение бесконечного числа замкнутых множеств не обязательно замкнуто. Для простоты рассмотреть случай $X = \mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь понятие плотности. Пусть A и B — два множества в метрическом пространстве X. Множество A называется *плотным в* B, если $[A] \supset B$. Множество A называется *всюду плотным* (в пространстве X), если $[A] = X$. Например, множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно на числовой прямой.

Определение 1.5. Пространства, в которых имеется счетное всюду плотное множество, называются *сепарабельными*.

Например, пространство $\mathbb{R}$ сепарабельно, так как множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно и всюду плотно в нем.

1.3 Сходимость в метрическом пространстве. Полнота

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность точек (элементов) в метрическом пространстве (X, ρ).

Определение 1.6. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к точке* $x \in X$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0,$$

т. е. если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ имеет место $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ (сокращенно это записывается так: $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon$ $\rho(x_n, x) < \varepsilon$).

Точка x называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$. Из определения предела вытекает, что если предел существует, то он единственен. Действительно, пусть x и y — два предела последовательности $\{x_n\}$. Тогда, используя неравенство треугольника, получаем

$$0 \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, $\rho(x, y) = 0$ и, следовательно, $x = y$.

Определение 1.7. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если

$$\lim_{n,\, m\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0,$$

т. е. если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n, m > N$ имеет место $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Из неравенства треугольника непосредственно следует, что всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Действительно,

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0 \quad \text{при } m, n \to \infty.$$

Обратный факт, вообще говоря, не имеет место.

Определение 1.8. Если в метрическом пространстве каждая фундаментальная последовательность имеет предел, то такое пространство называется *полным*.

Пространства $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $C[a, b]$, введенные в разделе 1.1, полны. Пространство рациональных чисел $(\mathbb{Q}, \rho)$ неполно (почему?), где ρ — метрика, заданная формулой (1.1). Приведем еще пример неполного пространства.

Пример 1.1. Пусть $X = (0, +\infty)$, а $\rho(x, y) = |x-y|$. Очевидно, что (X, ρ) — метрическое пространство. Покажем, что оно не полно.

Рассмотрим последовательность $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Это последовательность фундаментальна, так как

$$\rho(x_n, x_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0 \quad \text{при } n, m \to \infty.$$

С другой стороны, эта последовательность не имеет предела, так как $0 \notin X$.

Задание 1.2. Является ли пространство изолированных точек полным?

Если пространство неполно, то его можно включить некоторым (по существу, единственным) способом в некоторое полное пространство.

Определение 1.9. Пусть X — некоторое (необязательно полное) метрическое пространство. Полное метрическое пространство $\widetilde{X}$ называется *пополнением* пространства X, если:

1. X — подпространство $\widetilde{X}$, т. е. $X \subset \widetilde{X}$;
2. X всюду плотно в $\widetilde{X}$, т.е. $[X] = \widetilde{X}$ (здесь $[X]$ означает замыкание пространства X в пространстве $\widetilde{X}$).

Теорема 1.4. *Каждое метрическое пространство X имеет пополнение, и это пополнение единственно с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из X.*

Замечание 1.1. Фразу «с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из X» следует понимать следующим образом. Пусть X_1, X_2 — два пополнения пространства X. Тогда существует такое взаимнооднозначное отображение $\varphi\colon X_1 \to X_2$, что:

1. $\varphi(x) = x$ для всех $x \in X$ (неподвижность точек из X);
2. $\rho_1(x, y) = \rho_2(\varphi(x), \varphi(y))$ для всех $x, y \in X_1$, где ρ_1 — метрика в X_1, ρ_2 — метрика в X_2 (изометричность изображения, «сохранение расстояния»).